CHAPITRE 5: POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

POLYNÔMES:

```
> restart;
```

Un ***polynôme*** a le type *polynom* , et peut avoir plusieurs variables :

```
> P:=-7*x+5*x^2+75*x^3;Q:=x*(2*x-3*y)^2*(x-y);
```

$$P := -7\,x + 5\,x^2 + 75\,x^3$$

$$Q := x\,(2\,x - 3\,y)^2\,(x - y)$$

```
> type(P,polynom),whattype(P),whattype(Q);
```

$$true, +, *$$

nops(P) donne le nombre de termes selon la forme , développée ou factorisée , de P :

```
> nops(P),nops(Q);
```

$$3, 3$$

op(P) donne sous forme de séquence les termes ou les facteurs de P :

```
> op(P);op(Q);
```

$$-7\,x, 5\,x^2, 75\,x^3$$

$$x, (2\,x - 3\,y)^2, x - y$$

Coefficients , degré , valuation:

Les 2 syntaxes sont équivalentes:

```
> coeff(P,x^3);
```

$$75$$

```
> coeff(P,x,3);
```

$$75$$

Obtenir tous les coefficients de P (valable lorsque P est sous forme développée)

```
> coeffs(P);coeffs(Q);
```

$$5, 75, -7$$

```
Error, invalid arguments to coeffs
```

```
> coeffs(expand(Q));
```

$$-16, 21, -9, 4$$

Coefficient du terme de plus haut (de plus bas) degré:

```
> lcoeff(P),tcoeff(P);
```

$$75, -7$$

```
> lcoeff(Q,y),tcoeff(Q,y);
```

$$-9\,x,\ 4\,x^4$$

Degré et valuation:

```
> degree(P),degree(Q,x),degree(Q,y);
```

$$3,\ 4,\ 3$$

```
> ldegree(P),ldegree(Q,x),ldegree(Q,y);
```

$$1,\ 1,\ 0$$

FONCTIONS SUR LES POLYNOMES:

quo(P,Q,x,'r') : quotient de la division euclidienne de P par Q , variable x , 'r' (optionnel) variable non assignée recevant le reste .

```
> quo(x^5-1,x^2+x+1,x, 'r');r;
```

$$x^3-x^2+1$$

$$-2-x$$

rem(P,Q,x,'q') : reste de la division euclidienne de P par Q , variable x , 'q' (optionnel) variable non assignée recevant le quotient .

```
> rem(x^5-1,x^2+x+1,x, 'q');q;
```

$$-2-x$$

$$x^3-x^2+1$$

Discriminant:

```
> discrim(x^3+a*x+b,x);
```

$$-4\,a^3-27\,b^2$$

Evaluer, ordonner, transformer un polynôme:

```
> subs(x=1+2*I,y=I,Q);
```

$$-15+5\,I$$

Ordonner Q selon les puissances décroissantes de y:

```
> sort(expand(Q),y);
```

$$-9\,x\,y^3+21\,x^2\,y^2-16\,x^3\,y+4\,x^4$$

Développer:

```
> expand((x-3*y+a)*(1-a^2+x+y));
```

$$x-x\,a^2+x^2-2\,x\,y-3\,y+3\,y\,a^2-3\,y^2+a-a^3+a\,x+a\,y$$

Regrouper les monômes de l'expression en l'indéterminée a :

```
> collect((x-3*y+a)*(1-a^2+x+y),a);
```

$$-a^3+(-x+3\,y)\,a^2+(1+x+y)\,a+(x-3\,y)\,(1+x+y)$$

Mettre P sous la forme de Hörner:

```
> P;H:=convert(P,horner);
```

$$-7\,x+5\,x^2+75\,x^3$$

$$H:=(-7+(5+75\,x)\,x)\,x$$

```
> with(codegen,cost);
```

$$[\mathit{cost}]$$

Ce qui est moins coûteux en opérations:

```
> cost(P),cost(H);
```

$$2\ additions + 6\ multiplications,\ 3\ multiplications + 2\ additions$$

Factoriser sur le corps Q des rationnels

```
> factor(x^3+x^2+x+1);
```

$$(1+x)\,(x^2+1)$$

Normaliser:

```
> normal((4*x-3)^2+x-1);
```

$$16\,x^2 - 23\,x + 8$$

RACINES ET FACTORISATION DES POLYNÔMES:

Valeur approchées des zéros réels ou complexes avec ***fsolve*** :

```
> P:=x^3+x+1:fsolve(P);
```

$$-0.6823278038$$

```
> fsolve(P,x,complex);
```

$$-0.6823278038,\ 0.3411639019 - 1.161541400\,I,\ 0.3411639019 + 1.161541400\,I$$

Localiser les zéros réels dans un intervalle de longueur voulue , ici 10^-3 , avec ***realroot*** :

```
> realroot(P,0.001);
```

$$\left[\left[\frac{-699}{1024}, \frac{-349}{512}\right]\right]$$

Calcul des zéros avec ***solve(P)*** :

```
> solve(x^4+1);
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{2},\ \frac{1}{2}I\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2},\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{2},\ -\frac{1}{2}I\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Par la fonction ***factor***, on peut factoriser sur *Q* ou sur le corps induit par les coefficients :

```
> factor(x^4-1);
```

$$(x-1)\,(x+1)\,(x^2+1)$$

```
> factor(x^3-I*x-I+1);
```

$$-(x+I)\,(-x+1+I)\,(x+1)$$

<u>Pour obtenir la factorisation complète:</u>

factor(P,{α_1, α_2,...,α_n}) autorise Maple à factoriser P sur un corps contenant les nombres algébriques

α_1, α_2,...,α_n

```
> factor(x^4-1,I);
```

$$-(x+I)\,(-x+I)\,(x+1)\,(x-1)$$

```
> factor(x^3-x^2+2*x-2);
```

$$(x-1)\,(x^2+2)$$

```
> factor(x^3-x^2+2*x-2,{I,sqrt(2)});
```

$$(x-\sqrt{2}\,I)\,(x+\sqrt{2}\,I)\,(x-1)$$

On peut aussi utiliser ***Split*** , qui donne une factorisation complète :

```
> with(PolynomialTools,Split):P:=Split(x^4-1,x);
```

$$P := (x+\mathrm{RootOf}(\_Z^2+1))\,(x-1)\,(x-\mathrm{RootOf}(\_Z^2+1))\,(x+1)$$

RootOf désigne ici toute racine du polynôme $\_Z^2+1$, on peut simplifier l'écriture en utilisant ***alias***:

```
> alias(alpha=RootOf(_Z^2+1)):P;
```

$$(x+\alpha)\,(x-1)\,(x-\alpha)\,(x+1)$$

Pour calculer les valeurs possibles de alpha :

```
> allvalues(RootOf(_Z^2+1));
```

$$I, -I$$

La fonction ***roots*** donne les zéros avec leur ordre de multiplicité:

x^2+1 n'a aucun zéro sur Q:

```
> roots(x^2+1);
```

$$[\ ]$$

On calcule ses zéros sur le corps Q(I) induit par les coefficients:

```
> roots(x^2+1,I);
```

$$[[-I, 1], [I, 1]]$$

FRACTIONS RATIONNELLES : de type *ratpoly*

```
> F:=(2*x^2+x-3)^2/(x^4-1);numer(F),denom(F);
```

$$F := \frac{(2\,x^2+x-3)^2}{x^4-1}$$

$$(2\,x^2+x-3)^2,\ x^4-1$$

```
> simplify(F);
```

$$\frac{(2\,x+3)\,(2\,x^2+x-3)}{x^3+x^2+x+1}$$

Factorisation sur IR ou C:

factorisation sur IR:

```
> factor(F);
```

$$\frac{(2\,x+3)^2\,(x-1)}{(x+1)\,(x^2+1)}$$

factorisation sur C:

```
> factor(F,I);
```

$$\frac{(x-1)\,(2\,x+3)^2}{(x+I)\,(x-I)\,(x+1)}$$

retour à la forme normale:

```
> normal(%,expanded);
```

$$\frac{4\,x^3+8\,x^2-3\,x-9}{x^3+x^2+x+1}$$

Décomposition en éléments simples sur IR ou C:

convert(F,parfrac,*x*) décompose en éléments simples la fraction rationnelle F en l'indéterminée x .

convert(F,parfrac,*x*,{α_1, α_2,...,α_n}**)** autorise Maple à décomposer sur un corps contenant les nombres algébriques α_1, α_2,...,α_n

Décomposition sur IR:

```
> convert(F,parfrac,x);
```

$$4-\frac{1}{x+1}+\frac{-12+5\,x}{x^2+1}$$

Décomposition sur C:

```
> convert(F,parfrac,x,I);
```

$$4+\frac{\frac{5}{2}-6\,I}{x+I}-\frac{\frac{5}{2}+6\,I}{-x+I}-\frac{1}{x+1}$$

Exercice corrigé 5:

Ex 5.1: Décomposer en éléments simples sur IR , puis sur C , la fraction $F := \frac{1}{x^4+1}$

```
> F:=1/(x^4+1);
```

$$F := \frac{1}{x^4+1}$$

```
> convert(F,parfrac,x);
```

$$\frac{1}{x^4+1}$$

F n'est pas décomposée. Voyons les racines du dénominateur:

```
> {solve(denom(F))};
```

$$\{\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{2},-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{2},\frac{1}{2}I\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2},-\frac{1}{2}I\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\}$$

On obtient la décomposition sur IR par:

```
> convert(F,parfrac,x,sqrt(2));
```

$$-\frac{1}{4}\frac{-2+x\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\frac{1}{4}(2+x\sqrt{2})}{x^2+x\sqrt{2}+1}$$

On obtient la décomposition sur C par:

```
> convert(F,parfrac,x,{I,sqrt(2)});
```

$$-\frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}I\right)\sqrt{2}}{2x-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,I}-\frac{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}I\right)\sqrt{2}}{2x-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,I}+\frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}I\right)\sqrt{2}}{2x+\sqrt{2}-\sqrt{2}\,I}+\frac{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}I\right)\sqrt{2}}{2x+\sqrt{2}+\sqrt{2}\,I}$$

Ex 5.2: Soit $P=\mathrm{X}(X-1)(X-2)(X-3)$.
Montrer que les zéros du polynôme dérivé P' sont 3 termes consécutifs d'une suite arithmétique.

```
> P:=X*(X-1)*(X-2)*(X-3):dP:=diff(expand(P),X);
```

$$dP:=4X^3-18X^2+22X-6$$

```
> zeros:=[solve(dP)];
```

$$zeros:=\left[\frac{3}{2},\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2},\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right]$$

On trie les éléments de la liste par ordre croissant , *sort* ne fonctionnant pas ici :

```
> tri:=proc(L::list)
   local x,y,Z;
   Z:=L;
   for x to nops(Z)-1 do
     for y from x+1 to nops(Z) do
      if evalf(Z[y]-Z[x])<0 then Z:=subsop(x=Z[y],y=Z[x],Z) end
  if;
     end do;
   end do;
   Z;
   end proc:
> zeros:=tri(zeros);
```

$$zeros:=\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}\right]$$

On calcule les écarts entre 2 termes consécutifs , la raison est $\frac{\sqrt{5}}{2}$:

```
> for k to nops(zeros)-1 do print(zeros[k+1]-zeros[k]) end do;
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Travail dirigé 5:

TD 5.1:

Soit la fraction rationnelle F définie par : $F = \dfrac{X^6}{(X^2+1)^2\,(X+1)^2}$

1° La décomposition de F en éléments simples dans IR(X) s'écrit :

$$G := a + \frac{b\,X + c}{X^2+1} + \frac{d\,X + e}{(X^2+1)^2} + \frac{f}{X+1} + \frac{g}{(X+1)^2}$$

On réduit les fractions composant G au même dénominateur et on identifie les numérateurs de F et de G. En déduire les valeurs de a,b,c,d,e,f,g .

2° Calculer la décomposition de F en éléments simples dans C(X) .

TD 5.2:

Soit P un polynôme de K[x] , s'écrivant sous la forme :

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$$

L'algorithme de Hörner permet d'écrire P(x) sous la forme :

$$\mathrm{P}(x) = ((((a_n\,x + a_{n-1})\,x + a_{n-2})\,x + \;...\; + a_2)\,x + a_1)\,x + a_0$$

<u>Exemple:</u>

$$Q := 3\,x^4 + 2\,x^3 - x^2 + 2\,x + 1$$
$$Q := (((3\,x + 2)\,x - 1)\,x + 2)\,x + 1$$

Ecrire une procédure PolyHorner(P , x) permettant d'écrire P(x) sous cette forme , P étant un polynôme donné de K[x] , x étant le nom de la variable .

NB: il est interdit d'utiliser la fonction *horner* de MAPLE .

Grace à la fonction ***cost*** , évaluer le coût en opérations nécessaires pour évaluer Q et PolyHorner(Q,x) , Q étant le polynôme donné en exemple .