CHAPITRE 7: UTILISATION DE MAPLE EN ANALYSE

FONCTIONS NUMÉRIQUES :

Domaine de définition: la fonction ***singular*** permet de déterminer les singularités de certaines fonctions:

```
> restart;
  singular(tan(x));
```

$$\{x = \_Z1{\sim}\,\pi + \frac{1}{2}\pi\}$$

Continuité: la fonction ***iscont*** permet de déterminer la continuité de certaines fonctions.
closed signifie que l'intervalle est fermé.MAPLE travaille par défaut sur des intervalles ouverts.

```
> iscont(tan(x),x=-Pi/2..Pi/2,closed);
```

false

```
> iscont(tan(x),x=-Pi/2..Pi/2);
```

true

Image d'une réunion d'intervalles fermés , avec la fonction ***evalr*** :

```
> evalr((x->x^2)(INTERVAL(-1..-0.5)));
```

INTERVAL(0.25 .. 1)

Extrema d'une fonction , avec les fonctions ***minimize*** et ***maximize***:

```
> minimize(x^2+x-3),maximize(-x^4+x^2+1);
```

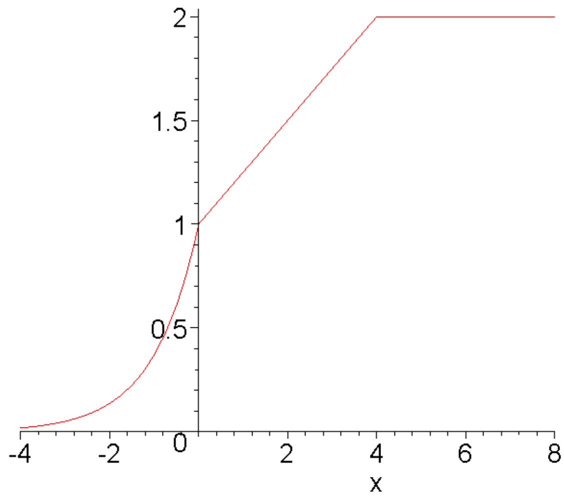
$$\frac{-13}{4}, \frac{5}{4}$$

Fonctions définies par intervalles:
La fonction ***piecewise*** permet de définir une fonction à partir de conditions sur différents intervalles: ***piecewise***(cond1,f1, cond2,f2, ..., condN,fN, f_autrement)

```
> f:=piecewise(x<0,exp(x),x<=4,x/4+1,2);
```

$$f := \begin{cases} \mathrm{e}^x & x < 0 \\ \frac{1}{4}x + 1 & x \le 4 \\ 2 & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

```
> plot(f(x),x=-4..8);
```



Limites: avec la fonction ***limit(expr, x=a , option)*** *option* = left , right .

```
> limit(sin(x)/x,x=0);
```

$$1$$

```
> limit(1/x^3,x=0);
```

$$\mathit{undefined}$$

Utilisation de la forme inerte Limit :

```
> Limit(1/x^3,x=0,right) = limit(1/x^3,x=0,right);
```

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^3} = \infty$$

Etude locale: avec ***taylor(expr , x=a , n)*** pour les développements limités ou de Taylor, ***series(expr , x=a , n)*** ou ***asympt(expr , x , n)*** pour des développements asymptotiques plus généraux. L'ordre *n* est facultatif et vaut 6 par défaut .

```
> taylor(sin(x),x);         # a=0 par défaut
```

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^6)$$

```
> taylor(x^2/(x^2+1),x=infinity,10);
```

$$1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^8} + O\left(\frac{1}{x^{10}}\right)$$

```
> series(exp(x)/x,x,9);    # a=0 par défaut
```

$$x^{-1} + 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + \frac{1}{720}x^5 + \frac{1}{5040}x^6 + \frac{1}{40320}x^7 + O(x^8)$$

```
> asympt(ln(x+1/x),x,7);   # toujours en plus l'infini
```

$$\ln(x) + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^4} + \frac{\frac{1}{3}}{x^6} + O\left(\frac{1}{x^7}\right)$$

```
> asympt(Sum(1/k,k=1..n)-ln(n),n,10);   # la constante d'Euler
  gamma
```

$$\frac{32287}{55440} - \mathrm{O}(1) + \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{12}\frac{1}{n^2} + \frac{\frac{1}{120}}{n^4} - \frac{1}{252}\frac{1}{n^6} + \frac{\frac{1}{240}}{n^8} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{10}}\right)$$

```
> evalf(gamma);
```

$$0.5772156649$$

leadterm donne le terme principal d'une série:

```
> series(leadterm(sin(x^3)/(2*x)),x=0);
```

$$\frac{1}{2}x^2$$

Conversion en polynôme de Taylor:

```
> P:=convert(taylor(exp(x),x=0,5),polynom);
```

$$P := 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

<u>Dérivation:</u>

Pour dériver une fonction , utiliser ***diff(expr,v1,v2,...,vn)*** qui calcule la dérivée partielle de *expr* par rapport aux variables *v1,v2,...,vn* .

```
> Diff(x/(x^2+y^2),x,y)=diff(x/(x^2+y^2),x,y);   # équivaut à
  Diff(x/(x^2+y^2),x,y): % = value(%);
```

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -2\frac{y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8\,x^2\,y}{(x^2+y^2)^3}$$

Noter l'absence de parenthèses dans l'écriture du premier membre .

On peut utiliser l'opérateur **$** pour éviter de répéter plusieurs fois une variable :

```
> Diff(x/(x^2+y^2),x$2,y) : % = value(%);
```

$$\frac{\partial^3}{\partial y\,\partial x^2}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = 24\frac{x\,y}{(x^2+y^2)^3} - \frac{48\,x^3\,y}{(x^2+y^2)^4}$$

<u>Opérateur différentiel D:</u> D(*f*) retourne la fonction dérivée première de *f*

Fonctions dérivées première et seconde:

```
> D(sin),(D@@2)(sin);
```

$$\cos, -\sin$$

```
> D(x->x*sin(x)-x);
```

$$x \rightarrow \sin(x) + x\cos(x) - 1$$

```
> f:=(x,y,z)->x^2-3*x*y*z+z^4;
```

$$f := (x, y, z) \rightarrow x^2 - 3\,x\,y\,z + z^4$$

fonction dérivée par rapport à *x*,*y*, et *z* respectivement :

```
> D[1](f);D[2](f);D[3](f);
```

$$(x, y, z) \rightarrow 2\,x - 3\,y\,z$$

$$(x, y, z) \to -3\,x\,z$$

$$(x, y, z) \to -3\,x\,y + 4\,z^3$$

D[i,j](f) équivaut à D[i](D[j](f)) :

```
> D[1,2](f);
```

$$(x, y, z) \to -3\,z$$

SUITES ET SÉRIES:

Suites définies par des sommes ou des produits:

```
> Sum(k^2,k=1..n) : % = factor(value(%));
```

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2\,n+1)$$

```
> Product(k/(k+1),k=1..n) : % = simplify(value(%));
```

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$$

Développement asymptotique de la somme partielle d'une série:

```
> series(sum(1/k^2,k=1..n),n=infinity);
```

$$\frac{1}{6}\pi^2 - \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}}{n^2} - \frac{1}{6}\,\frac{1}{n^3} + \frac{\frac{1}{30}}{n^5} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

Suites récurrentes:

Type $\mathrm{u}(n+1) = \mathrm{f}(\mathrm{u}(n))$:

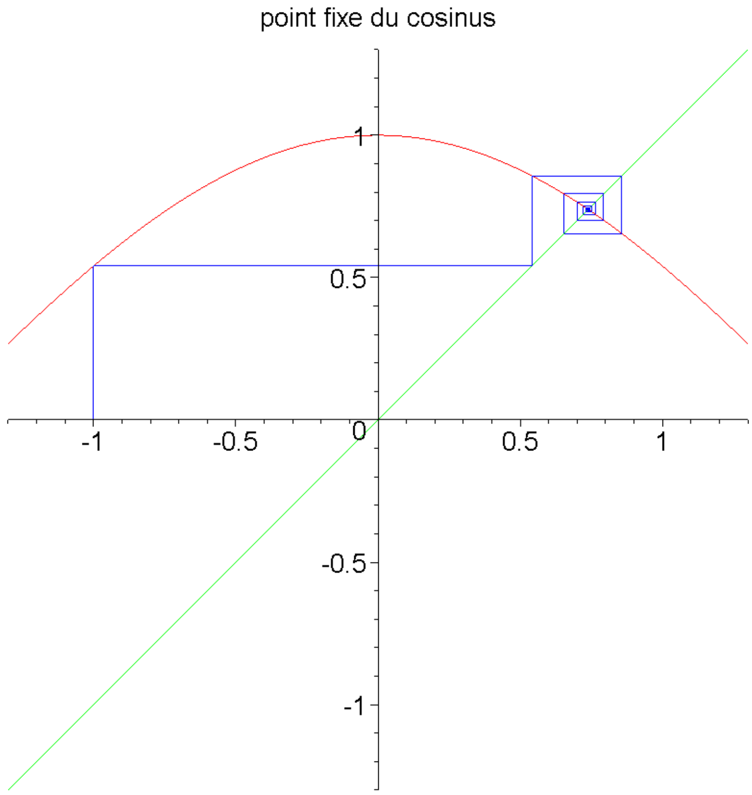
Exemple: $\mathrm{u}(0) = -1$, $\mathrm{u}(n+1) = \cos(\mathrm{u}(n))$, calcul de $\mathrm{u}(k)$, pour $k = 1, 2,..,15$.

```
> f:=x->cos(x):n:=15:u[0]:=-1:
  for k to n do u[k]:=evalf(f(u[k-1])) end do:
```

On peut représenter graphiquement la convergence de la suite en construisant une liste T formée des points (u(0),0) , (u(0),u(1)) , (u(1),u(1)) , (u(1),u(2)) , etc...

```
> T:=array(1..4*n,[u[0],0,u[0],f(u[0])]):
  for k from 2 to 2*n-1 do
     T[2*k+1]:=T[2*k]:
     if is(k,odd) then T[2*(k+1)]:=evalf(f(T[2*k+1])) else
      T[2*(k+1)]:=evalf(T[2*k+1])
     end if
  end do:
  T:=convert(T,list):U:=NULL:
  for k to nops(T)-1 by 2 do
      U:=U,[T[k],T[k+1]]
```

```
end do:
U:=plot([U],color=blue):G:=plot({f(x),x},x=-1.3..1.3,scaling=con
strained):plots[display]({G,U},title="point fixe du
cosinus",view=[-1.3..1.3,-1.3..1.3]);
```



Type $\mathrm{u}(n+1)=\mathrm{f}(\mathrm{u}(n),\mathrm{v}(n)),\ \mathrm{v}(n+1)=\mathrm{g}(\mathrm{u}(n),\mathrm{v}(n))$:

<u>Exemple:</u> $\mathrm{u}(0)=1,\ \mathrm{v}(0)=4,\ \mathrm{u}(n+1)=\sqrt{\mathrm{u}(n)\,\mathrm{v}(n)},\ \mathrm{v}(n+1)=\dfrac{\mathrm{u}(n)+\mathrm{v}(n)}{2}$.

```
> u[0]:=1:v[0]:=4:n:=15:
  for k to n do
    u[k]:=evalf(sqrt(u[k-1]*v[k-1])):v[k]:=(u[k-1]+v[k-1])/2
  ens do:
```

Type $\mathrm{u}(n+2)=\mathrm{f}(\mathrm{u}(n+1),\mathrm{u}(n))$:

<u>Exemple:</u> $\mathrm{u}(0)=0,\ \mathrm{u}(1)=4,\ \mathrm{u}(n+2)=\sqrt{\mathrm{u}(n)+\mathrm{u}(n+1)}$.

```
> u[0]:=0:u[1]:=4:n:=15:
  for k from 2 to n do u[k]:=evalf(sqrt(u[k-1]+u[k-2])) end do:
```

<u>Résolution de récurrences</u> , avec la fonction ***rsolve***.

Une suite arithmétique de raison -3:

```
> restart:rsolve(w(n+1) = w(n)-3,w);
```

$$\mathrm{w}(0)-3\,n$$

Une suite géométrique avec condition initiale:

```
> rsolve({w(n+1)=w(n)/3,w(0)=-7},w);
```

$$-7\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

La suite de Fibonacci:

```
> rsolve({fib(n+2)=fib(n+1)+fib(n),fib(0)=0,fib(1)=1},fib);
```

$$\frac{\left(1-\frac{1}{5}\sqrt{5}\right)\left(2\frac{1}{-1+\sqrt{5}}\right)^n}{-1+\sqrt{5}}+\frac{\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}-1\right)\left(-2\frac{1}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1+\sqrt{5}}$$

<u>Séries numériques:</u>

Somme d'une série de Riemann convergente:

```
> sum(1/k^2,k=1..infinity);
```

$$\frac{1}{6}\pi^2$$

La série harmonique est divergente:

```
> sum(1/k,k=1..infinity);
```

$$\infty$$

Calcul de la somme d'une série de fonctions

```
> Sum(sin(x)^k,k=1..infinity)=sum(sin(x)^k,k=1..infinity);
```

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin(x)^k=-\frac{\sin(x)}{\sin(x)-1}$$

Le package ***powseries*** contient des fonctions mettant en jeu les séries entières:
Consulter les pages d'aide de powseries pour plus de précision.

```
> with(powseries);
```

[*compose*, *evalpow*, *inverse*, *multconst*, *multiply*, *negative*, *powadd*, *powcos*, *powcreate*, *powdiff*, *powexp*, *powint*, *powlog*, *powpoly*, *powsin*, *powsolve*, *powsqrt*, *quotient*, *reversion*, *subtract*, *template*, *tpsform*]

```
> sh := evalpow( sinh(x) ): tpsform(sh, x, 9);
```

$$x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{5040}x^7+\mathrm{O}(x^9)$$

<u>INTÉGRATION:</u>

Le calcul des primitives et des intégrales se fait avec la fonction ***int*** .
Syntaxes: ***int(expr , x)*** et ***int(expr, x=a..b)*** .

```
> Int(x/(x^4+1),x)=int(x/(x^4+1),x);
  # équivaut à  Int(x/(x^4+1),x) : % = value(%);
```

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\arctan(x^2)$$

```
> Int(x/(x^4+1),x=0..1) : % = value(%);
```

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{8}\pi$$

Intégrale généralisée convergente:

```
> Int(x/(x^4+1),x=0..infinity) : % = value(%);
```

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4}\pi$$

Intégrale généralisée divergente:

```
> Int(exp(x)/x,x=1..infinity) : % = value(%);
```

$$\int_1^\infty \frac{\mathbf{e}^x}{x}\,dx = \infty$$

Le package ***inttrans*** contient quelques outils pour la transformation d'intégrales.
Consulter les pages d'aide de inttrans pour plus de précision.

```
> with(inttrans);
```

[*addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable*]

La transformée de Laplace de f est définie par $F(s)=\int_0^\infty f(t)\,\mathbf{e}^{(-s\,t)}\,dt$.

```
> laplace(sin(omega*t), t, s);
```

$$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Quelques outils du package ***student*** :

```
> with(student);
```

[D, *Diff, Doubleint, Int, Limit, Lineint, Product, Sum, Tripleint, changevar, completesquare, distance, equate, integrand, intercept, intparts, leftbox, leftsum, makeproc, middlebox, middlesum, midpoint, powsubs, rightbox, rightsum, showtangent, simpson, slope, summand, trapezoid*]

Changement de variables dans les intégrales: ***changevar(eq , intégrale , u)***
eq est l'équation du changement de variable de la forme *f(x)=g(u)* , *intégrale* est l'intégrale et *u* la nouvelle variable d'intégration :

```
> J:=Int(t/((t^2+1)*sqrt(1-t^4)),t=0..1);
```

$$J := \int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)\sqrt{1-t^4}}\,dt$$

```
> changevar(t^2=u,J,u):% = value(%);
```

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{1}{(u+1)\sqrt{1-u^2}}\,du = \frac{1}{2}$$

Intégration par parties , avec la fonction ***intparts(intégrale,u)*** , u est le facteur à dériver.

```
> J:=Int(x^2*arccos(x),x):intparts(J,arccos(x));
```

$$\frac{1}{3}\arccos(x)\,x^3 - \int -\frac{1}{3}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

```
> J:=value(%);
```

$$J := \frac{1}{3}\arccos(x)\,x^3 - \frac{1}{9}x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{9}\sqrt{1-x^2}$$

METHODES D'APPROXIMATION D'INTEGRALES:

METHODE DES RECTANGLES: On découpe [a,b] en n intervalles de même longueur
extrémité gauche :
représentation avec ***leftbox(expr,x=a..b,n)*** , calcul avec ***leftsum(expr,x=a..b,n)***

extrémité droite :
représentation avec ***rightbox(expr,x=a..b,n)*** , calcul avec ***rightsum(expr,x=a..b,n)***

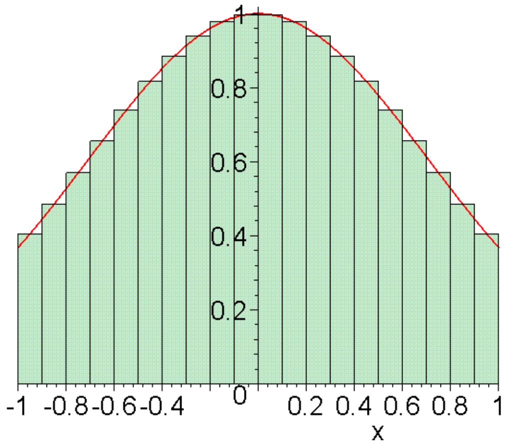
point médian :
représentation avec ***middlebox(expr,x=a..b,n)*** , calcul avec ***middlesum(expr,x=a..b,n)***

METHODE DES TRAPEZES: calcul avec ***trapezoid(expr,x=a..b,n)***

METHODE DE SIMPSON: calcul avec ***simpson(expr,x=a..b,n)*** , avec n pair.

Exemple: avec f: $x \rightarrow \mathbf{e}^{(-x^2)}$

```
> middlebox(exp(-x^2),x=-1..1,20);middlesum(exp(-x^2),x=-1..1,20);
  evalf(%);
```



$$\frac{1}{10}\left(\sum_{i=0}^{19} \mathbf{e}^{\left(-\left(-\frac{19}{20}+1/10\, i\right)^2\right)}\right)$$

$$1.494261756$$

```
> evalf(trapezoid(exp(-x^2),x=-1..1,20));
```

$$1.492421592$$

```
> evalf(simpson(exp(-x^2),x=-1..1,20));
```

$$1.493649896$$

<u>Calcul d'intégrales doubles ou triples:</u>

```
> Doubleint(x^3*y-x^2-y*x,x=-a..a,y=-b..b):%=value(%);
```

$$\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} x^3\, y - x^2 - y\, x \, dx\, dy = -\frac{4}{3}\, a^3\, b$$

```
> Tripleint(x*y*z*sin(x+y+z),x=0..Pi,y=-Pi..Pi,z=0..Pi):%=value(%)
;
```

$$\int_{0}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} x\, y\, z \sin(x+y+z)\, dx\, dy\, dz = 8\,\pi - 2\,\pi^3$$

<u>ÉQUATIONS ET SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS:</u>

<u>Equations du premier ordre:</u> MAPLE sait résoudre directement les équations de type classique - linéaire - avec facteur intégrant - séparable - homogène - résolue en x - de Bernoulli - de Clairaut - de Riccati .

Équation $y' + 3\, y = \mathbf{e}^{(-x)}$

```
> restart:eq:=diff(y(x),x)+3*y(x)=exp(-x):dsolve(eq,y(x));
```

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{(2\,x)} + \_C1\right)\mathbf{e}^{(-3\,x)}$$

_C1 désigne une constante réelle arbitraire.

La même avec la condition initiale $y(0) = 1.5$

```
> dsolve({eq,y(0)=1.5},y(x));
```

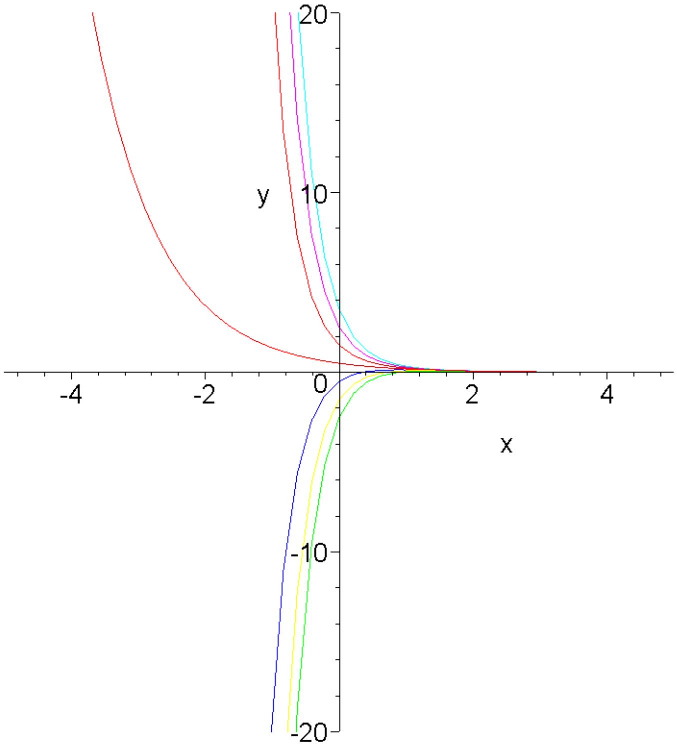
$$y(x) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{e}^{(2\,x)} + 1\right)\mathbf{e}^{(-3\,x)}$$

Les solutions y(x) ne sont pas directement utilisables : en assignant la solution à y(x) on peut utiliser le résultat , par exemple pour représenter les courbes intégrales :

```
> assign(dsolve(eq,y(x))):y:=unapply(y(x),_C1,x);
```

$$y := (\_C1, x) \to \left(\frac{1}{2}\mathbf{e}^{(2\,x)} + \_C1\right)\mathbf{e}^{(-3\,x)}$$

```
> plot({seq(y(_C1,x),_C1=-3..3)},x=-5..5,y=-20..20);
```



On peut préciser des options de résolution : *explicit* (pour tenter d'exprimer la solution comme fonction explicite de la variable) , *series* (chercher les solutions sous forme de séries)

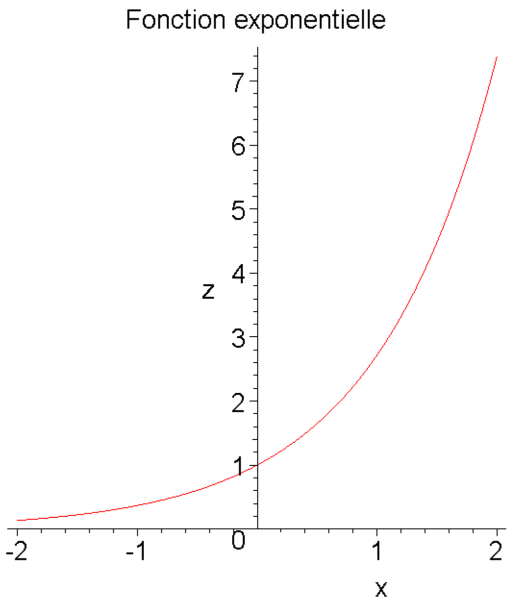
```
> eq:={diff(z(x),x)+z(x)*cos(x)=1,z(0)=1}:
  dsolve(eq,z(x));dsolve(eq,z(x),series);
```

$$z(x) = \mathbf{e}^{(-\sin(x))}\int_0^x \mathbf{e}^{\sin(u)}\,du + \mathbf{e}^{(-\sin(x))}$$

$$z(x) = 1 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \mathrm{O}(x^6)$$

La fonction ***odeplot*** du package plots permet de représenter les solutions d'une équation différentielle :

```
> with(plots,odeplot):
  p:= dsolve({D(z)(x) = z(x),z(0)=1}, z(x),type=numeric):
  odeplot(p,[x,z(x)],-2..2,title="Fonction exponentielle");
```



Equations du second ordre: MAPLE sait résoudre directement les équations de type classique - linéaire - d'Euler - de Bessel .

Équation $y'' + y' + y = t$

```
> restart:eq2:=diff(y(t),t$2)+diff(y(t),t)+y(t)=t;
```

$$eq2 := \left(\frac{d^2}{dt^2}\,y(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}\,y(t)\right) + y(t) = t$$

```
> dsolve(eq2,y(t));
```

$$y(t) = e^{(-1/2\,t)}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right)\_C2 + e^{(-1/2\,t)}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right)\_C1 - 1 + t$$

La même avec conditions initiales:

```
> dsolve({eq2,y(0)=0,D(y)(0)=-1},y(t));
```

$$y(t) = -e^{(-1/2\,t)}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right)\sqrt{3} + e^{(-1/2\,t)}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right) - 1 + t$$

Les options de résolution sont les mêmes qu'à l'ordre 1.

Systèmes différentiels:

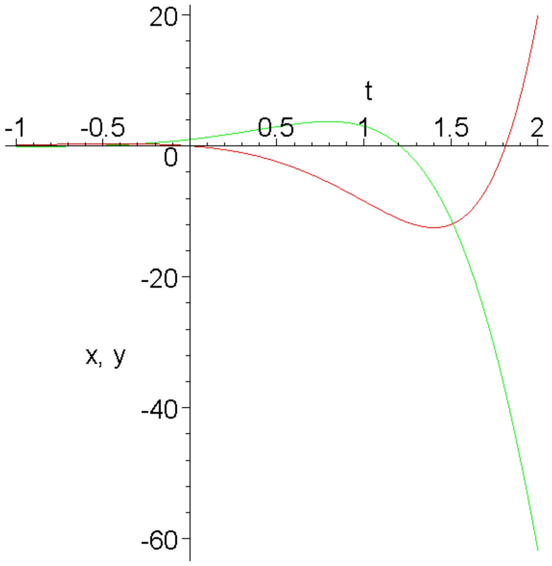
Exemple: résoudre $x'=x-2y$, $y'=2x+3y$. Représenter la solution vérifiant $x(0)=0$ et $y(0)=1$.

```
> restart:sys:=diff(x(t),t)=x(t)-2*y(t),diff(y(t),t)=2*x(t)+3*y(t)
  :
  dsolve({sys},{x(t),y(t)});
```

$$\{x(t) = e^{(2\,t)}(\_C1\sin(\sqrt{3}\,t) + \_C2\cos(\sqrt{3}\,t)),$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{(2\,t)}(-\_C1\sin(\sqrt{3}\,t) - \_C1\cos(\sqrt{3}\,t)\sqrt{3} - \_C2\cos(\sqrt{3}\,t) + \_C2\sin(\sqrt{3}\,t)\sqrt{3})\}$$

```
> p:=dsolve({sys,x(0)=0,y(0)=1},{x(t),y(t)},numeric):
  with(plots):odeplot(p,[[t,x(t)],[t,y(t)]],-1..2);
```



Résolution d'équations aux dérivées partielles:

```
> edp:=y*diff(U(x,y),x)+x*diff(U(x,y),y)=0;
```

$$edp := y\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{U}(x,y)\right)+x\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{U}(x,y)\right)=0$$

```
> pdsolve(edp,U(x,y) );
```

$$\mathrm{U}(x,y)=\_\mathrm{F1}(-x^2+y^2)$$

_F1 désigne une fonction arbitraire de classe C1 de la variable $-x^2+y^2$.

Travail dirigé 7:

Soit f la fonction définie pour tout réel $x>0$ par $\mathrm{f}(x)=x^{\left(\frac{x}{1-x}\right)}$.

1° Etablir les singularités de la fonction f et vérifier sa continuité.

2° Etudier les limites de f aux bornes des intervalles composant Df.
Quelles est l'asymptote de la courbe Cf de f ?

3° Calculer f '(x) et étudier son signe (on aura recours à une fonction auxiliaire g).

4° Représenter la courbe Cf.

5° Etudier la dérivabilité du prolongement par continuité de f aux points 0 et 1.